

„Mathematikaufgaben und Sprache – Mit Sprache muss man rechnen“



9. Sommeruniversität Schleswig-Holstein Akademie Sankelmark

Jun. Prof. Dr. Christina Drüke-Noe

26. August 2016

Gliederung

Einstimmung

Mathematisches Kommunizieren

Entwicklung mathematischer Sprache

Typen mathematischer Begriffe

Schwierigkeiten beim Kompetenzerwerb

Anregungen für den Kompetenzaufbau

Arbeitsphase

Einstimmung

In der Zeitung stand:

„Die Schuldenzunahme hat sich verringert.“

Eine Frage und eine Antwort darauf:

„Kennst Du Beispiele für Würfel?“

„Ja, Würfelzucker.“

Eine Lehrerfrage und eine Schülerantwort dazu:

L: „Was ist ein Rechteck?“

S: „Das ist ein langes Quadrat.“

Begriffliche Grundlage

Bildungsstandards Mathematik



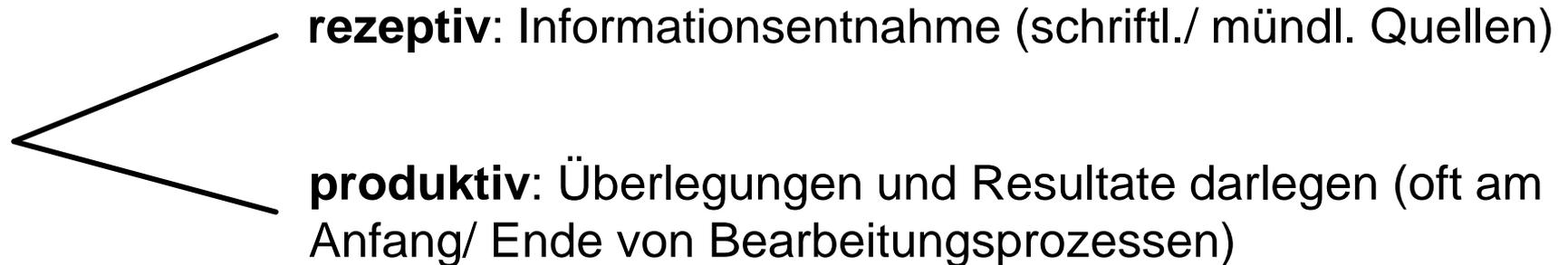
3 Niveaus
(kognitive
Komplexität)

5 Leitideen

5(6) Kompetenzen

u.a. Mathematisches Kommunizieren

Zwei Richtungen:



Spektrum:

Direkt/ unmittelbar/ einfach ... Sinn entnehmend/ komplex/
anspruchsvoll

Sprachliche Anforderungen (u.a. Fachsprache)!

Teilkompetenzen des Kommunizierens

Anforderungs- bereich I	Darlegung einfacher mathematischer Sachverhalte
	Identifikation/ Auswahl von Informationen aus kurzen mathemathikhaltigen Texten (Ordnung der Informationen im Text entspricht weitgehend Schritten der mathematischen Bearbeitung)

Aus: Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss und den Mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik (KMK 2011)

Teilkompetenzen des Kommunizierens

Anforderungs- bereich II	Verständliche, i. d. R. mehrschrittige Darlegung von Lösungswegen, Überlegungen und Ergebnissen
	Äußerungen (richtige, aber auch fehlerhafte) anderer Personen zu mathematischen Texten und Situationen interpretieren
	Identifikation und Auswahl von Informationen aus mathemathhaltigen Texten (Ordnung der Informationen entspricht nicht unmittelbar den Schritten der mathematischen Bearbeitung)

Kommunizieren im Anforderungsbereich II

Aufgabe 11: Linear und proportional

Eine proportionale Funktion kann im Koordinatensystem durch eine Gerade dargestellt werden, die durch den Punkt $(0|0)$ verläuft.

Jede lineare Funktion kann durch eine Funktionsgleichung der Form $y = mx + b$ beschrieben werden.

11.1

Nachfolgend werden drei Sachsituationen beschrieben.

Entscheide jeweils, ob sich die Sachsituation durch eine lineare Funktion beschreiben lässt.

Kreuze jeweils an.

	ja	nein
Ein Stromanbieter verlangt eine monatliche Grundgebühr. Für jede verbrauchte Kilowattstunde Strom ist zusätzlich eine festgelegte Gebühr zu zahlen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Das Schwimmbecken eines Freibades ist zu Saisonbeginn leer. Vor der Eröffnung der Freibadsaison wird das Schwimmbecken mit Wasser befüllt. Dabei ist die pro Stunde einlaufende Wassermenge gleich.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ein Sparbetrag wird für drei Jahre mit einem festen Zinssatz angelegt. Nach dem ersten Jahr werden auch die Zinsen verzinst.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Teilkompetenzen des Kommunizierens

Anforderungs- bereich III	Entwickeln einer kohärenten und vollständigen Präsentation eines komplexen Lösungs- oder Argumentationsprozesses
	komplexe mathematische Texte Sinn entnehmend erfassen
	Äußerungen von anderen vergleichen, bewerten und ggf. korrigieren

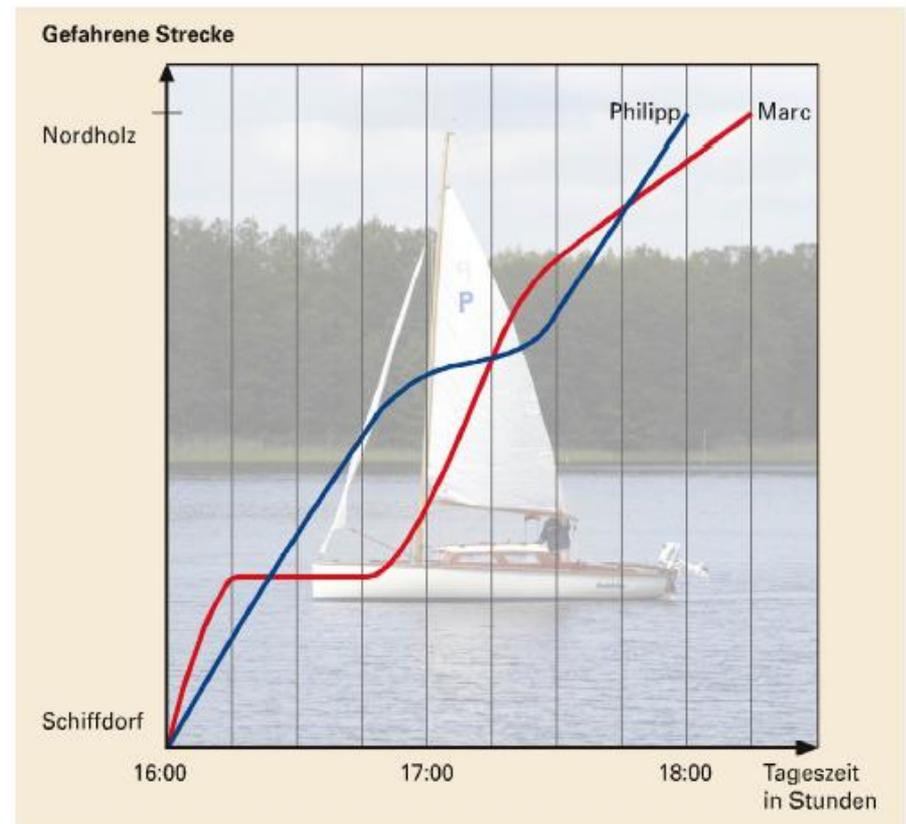
(KMK 2011)

Rennbericht

Das Schaubild zeigt den Verlauf einer Segelboot-Wettfahrt von Marc und Philipp von Schiffdorf nach Nordholz. In Abhängigkeit von der Zeit wird die zurückgelegte Strecke angegeben:

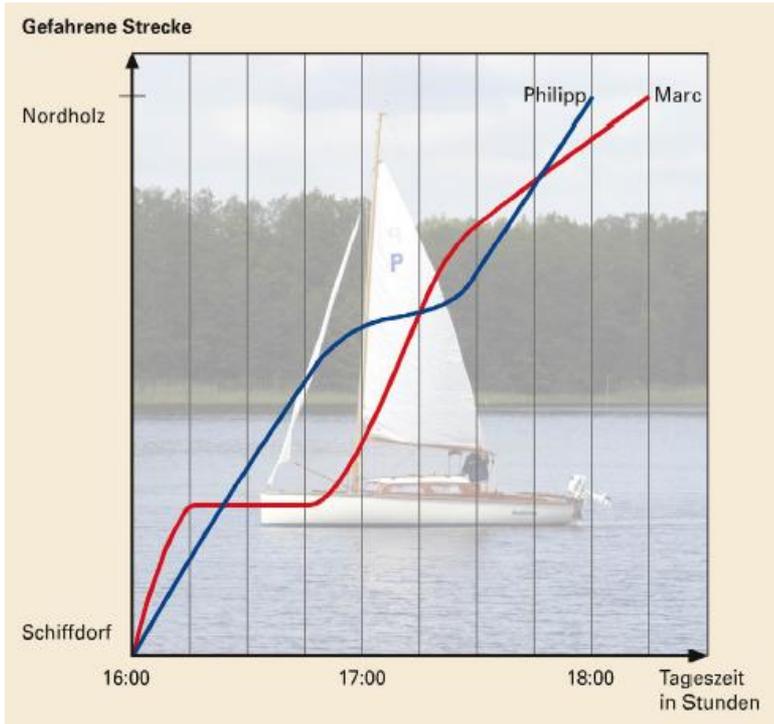
- a) Schreibe dazu einen Bericht unter Verwendung folgender Begriffe: Reihenfolge und Abstand zwischen Marc und Philipp; Geschwindigkeit (niedrig, gleichmäßig, hoch); Beschleunigung; Überholvorgänge; Technischer Halt; Zieleinlauf.

Welche Schlagzeile verwendest du für deinen Bericht?



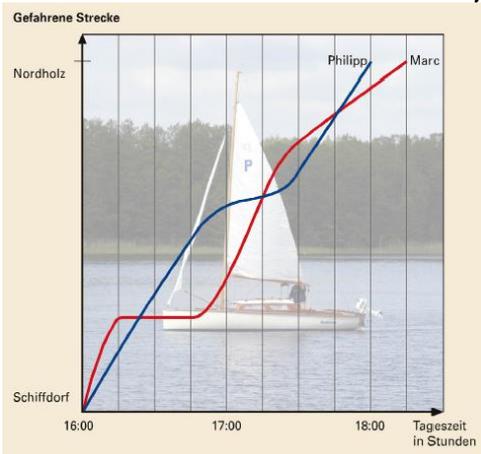
Aus: Blum et al. (2006)

Eine Schülerlösung zu Rennbericht a)



i) Das Schaubild zeigt den Verlauf einer Segelbootwettkampf von Marc und Philipp von Schiffdorf nach Nordholz. Sie fahren von Schiffdorf um 16⁰⁰ ab. Dabei überholt Philipp dreimal Marc. Philipp erreicht sein Ziel um 18⁰⁰ Uhr, Marc erreicht sein Ziel um 19⁰⁰ Uhr, also eine Stunde später. Philipp ist zweimal schneller als Marc. Das kann man auch bei dem Graph sehen. Nur um 16³⁰ und ~~17¹⁵~~ und auch 17⁴⁵ sind sie gleich schnell (also gleichmäßig). Obwohl die Beschleunigung und Geschwindigkeit bei Marc am Anfang gut war, 16⁵⁰ verliert er seine Kontrolle. Die ~~Philipp~~^{Marc} hatte am Anfang sehr gute Beschleunigung und Geschwindigkeit, aber zwischen 16¹⁵ und 16⁴⁵ ~~ist~~ nur seine Geschwindigkeit gleichmäßig, ab 17³⁰ gibt er Gas, aber hilft im nichts.

Eine Schülerlösung zu Rennbericht a)



Das Schaubild zeigt den Verlauf einer Segelbootwettkampf von Marc und Philipp von Schiffdorf nach Nordholz. Sie fahren von Schiffdorf um 16⁰⁰ ab. Dabei überholt Philipp dreimal Marc. Philipp erreicht sein Ziel um 18⁰⁰ Uhr, Marc erreicht sein Ziel um 19⁰⁰ Uhr, also eine Stunde später. Philipp ist zweimal schneller als Marc. Das kann man auch bei dem Graph sehen. Nur um 16³⁰ und ~~17¹⁵~~ und auch 17⁴⁵ sind sie gleich schnell (also gleichmäßig).⁺

Entwicklung mathematischer Sprache

Mathematikspezifische Sprach- und Lesekompetenz

Von der Umgangssprache zur Fachsprache

Schwierigkeiten beim Kompetenzerwerb

- ... auf der Sachebene
- ... auf der sprachlichen Ebene
- ... auf der mathematischen Ebene

Beherrschen und Anwenden der Fachsprache ist Grundlage für Aufbau mathematikspezifischer Lese-/ Sprachkompetenz

Enger Zusammenhang mit math. Kenntnissen

Entwicklung und Erweiterung math. Kenntnisse und Fähigkeiten
Lesen *und* Verfassen **mathematikhaltiger Texte**

Kennzeichen mathematikhaltiger Texte:

- Sehr dichte Sprache
- häufig sehr prägnante Formulierungen
- i. A. nur wenig Spielraum für Interpretationen
- Kontinuierlich oder nicht-kontinuierlich (Baumert et al., 2001)

Von der Umgangssprache zur Fachsprache



Natürliche Sprache

(Vollrath, 2001)

+ math. Fachwörter/ Redewendungen

→ **mathematische Umgangssprache**

+ **formale Sprache** (math. Symbole)

→ **mathematische Fachsprache**

Bewusste Sprach- und Begriffsanalyse!

Probleme bei Begriffen:

Oberflächliche Gemeinsamkeiten (Umgangssprache und Fachsprache)

Unterschiedliche Bedeutungen → Ursache für Schwierigkeiten

Typen mathematischer Begriffe

1. Von der Umgangssprache assimilierte Begriffe,
2. aus Umgangssprache verstehbare Fachtermini,
3. an umgangssprachliche Begriffe angelehnte Fachtermini,
4. aus Umgangssprache entlehnte Termini mit anderer Bedeutung,
5. Kunstwörter,
6. Symbole in der Fachsprache

Analyse fachsprachlicher Begriffe und ihrer Eigenschaften:

- Schwierigkeiten klären
- mit Begriffen verbundene Konzepte transparent machen
- zu einer erfolgreichen Bearbeitung der Aufgaben beitragen

(Vollrath, 2001)

Aus der Umgangssprache verstehbare Fachtermini

Beispiele:

„fünfstellige Zahl“, „Mittelsenkrechte“, „kongruent“

Behebung von Schwierigkeiten durch

- Eindeutschen des Begriffes
- „kongruent“ anfänglich durch „deckungsgleich“ ersetzen
- genaue Analyse der Bestandteile eines Begriffes (Prozent; aber auch „Nebenwinkel“)

An umgangssprachliche Begriffe angelehnte Fachtermini

Höhere Stufe der Abstraktion

Grundlage ist häufig ein sehr anschauliches Phänomen;
Versuch, dieses durch Mathematisierung zu erfassen

Beispiel:
„ähnlich“

Aber:
„ähnlich“ in Umgangssprache \neq „ähnlich“ in Mathematik

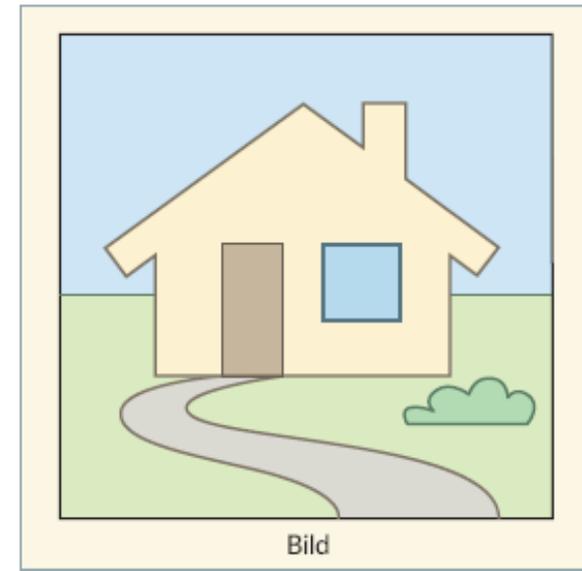
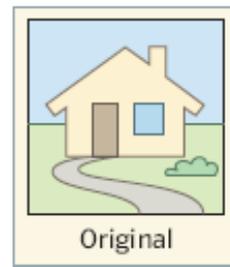
Behebung von Schwierigkeiten durch
- bewusste Kontrastierung der Bedeutungsunterschiede

Ähnlichkeit

ml9E, S. 21

Welche Angaben im Original braucht der Zeichner um das Haus vergrößert zeichnen zu können?

Wie ändern sich die Strecken, wie ändern sich die Winkel beim Vergrößern?



Kontrastierung mit
umgangssprachlichem
Begriff im Unterricht

Übrigens

Der Maßstab k wird auch **Ähnlichkeitsfaktor** genannt. Er kann verschieden angegeben werden:
 $3:4 = \frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$

Wird eine Originalfigur maßstäblich vergrößert oder verkleinert, so sind Bildfigur und Originalfigur zueinander **ähnlich**. Das Längenverhältnis zwischen den Strecken der Bild- und der Originalfigur wird durch den **Maßstab k** festgelegt.

$$k = \frac{\text{Länge der Bildstrecke}}{\text{Länge der Originalstrecke}}$$

Jeder Winkel der Bildfigur ist genauso groß wie der entsprechende Winkel der Originalfigur.

Aus der Umgangssprache entlehnte Termini mit anderer Bedeutung

Solche Begriffe sind nur durch Definitionen verstehbar.

Beispiel:

„Körper“

Umgang mit solchen Begriffen:

- Breites Spektrum von Beispielen
- Vorstellungen aufbauen
- An Gegenbeispielen Einfluss definierender Bedingungen herausstellen

Symbole in der Fachsprache

Höchste Stufe sprachlicher Abstraktion,
Symbole und Zeichen ergänzen math. Umgangssprache,
Umgang damit bereitet häufig Lernschwierigkeiten

Beispiel:

„=“ (Prozess- *und* Relationszeichen)

Weiteres Problem:

Unterscheidung math. Objekt und seiner Bezeichnung/ Eigenschaft

Beispiele:

- Fläche vs. Flächeninhalt
- In Bruchrechnung: *ein* Objekt kann verschiedene Namen haben

Schwierigkeiten beim Kompetenzerwerb

Schwierigkeiten bestehen potenziell auf

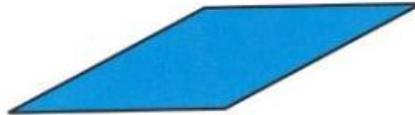
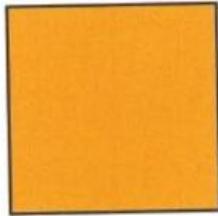
- ... Wortebene
- ... Satzebene
- ... Textebene

Auf jeder Ebene

- ... mögliche Schwierigkeiten beachten
- ... *notwendige* Vereinfachungen bedenken

Ein Beispiel

5. Benenne die Figuren:



Schwierigkeiten auf der Wortebene

Schwierigkeiten	Geeignete Maßnahmen	Zu vermeiden
(Unbekannte) Fachbegriffe	<ul style="list-style-type: none"> - gebräuchliche, eindeutige Wörter 	<ul style="list-style-type: none"> - Umgangssprache, Zeitgeistwörter
Fremdwörter aus dem Bereich der Standardsprache	<ul style="list-style-type: none"> - Konkrete und anschauliche Wörter eher als abstrakte - Konsistente Begriffe 	<ul style="list-style-type: none"> - <i>lassen-</i>Konstruktionen - Indirekte Verneinungen
Komposita	<ul style="list-style-type: none"> - Einzelne Worte hervorheben - Ziffern/ Zahlwörter 	<ul style="list-style-type: none"> - (ungewohnte) Abkürzungen <p style="text-align: right;">(vgl. Drüke-Noe, 2012)</p>

Zudem überlegen: **Wann** wird ein Fachbegriff eingeführt? **Wie?**

Eine Aufgabe – mit und ohne Fachsprache

Variante 1:

Eine kleine Tüte enthält noch 8 Gummibärchen: 3 rote, 4 gelbe und ein weißes. Maïke zieht mit geschlossenen Augen nacheinander zwei Gummibärchen.

Notiere die Ergebnismenge.

Variante 2:

Eine kleine Tüte enthält noch 8 Gummibärchen: 3 rote, 4 gelbe und ein weißes. Maïke zieht mit geschlossenen Augen nacheinander zwei Gummibärchen.

Notiere alle möglichen Farbkombinationen.

Schwierigkeiten auf der Satzebene

Schwierigkeiten	Geeignete Maßnahmen	Zu vermeiden
Lange Sätze	<ul style="list-style-type: none"> - „Kurze“ Sätze - Typische Satzstrukturen (S-P-O), schnell erfassbar - einfacher Nebensatz statt Substantivierung - Eindeutige Fragen/ Aufforderungen/ Operatoren - Eine Frage/ Aufforderung pro Satz (möglichst direkt) - Ursache vor Wirkung, Aktion vor Ergebnis, Information vor Instruktion 	<ul style="list-style-type: none"> - Eingeschobene Nebensätze - Passiv, insbes. wenn Agent vorhanden - Textreihenfolge entspricht nicht der sachlogischen Reihenfolge
Passivstrukturen		
Ungewohnte Satzstellung		
Verneinungen/ Negationen		

Schwierigkeiten auf der Textebene

Schwierigkeiten	Geeignete Maßnahmen
Text hat keine optische Gliederung	<ul style="list-style-type: none">- Text optisch gliedern (z.B. Überschriften, Zeilenumbrüche, Gliederung, Aufgabentext und Aufforderung optisch trennen)- Aufgabenaufbau bewusst durchdenken: Worum geht es inhaltlich?, Welche Infos sind gegeben?, Was ist gesucht?
Frage bzw. Aufforderung ist unklar formuliert	<ul style="list-style-type: none">- Infos in Tabelle/ Grafik statt in Text geben

(vgl. Drüke-Noe, 2012)

Anregungen für den Kompetenzaufbau

Sprachliche *und* inhaltliche Durchdringung einer Sache
→ erfolgreiche Aufgabenbearbeitung (hoffentlich 😊)

Verschiedene Teilkompetenzen des Kommunizierens bewusst berücksichtigen und schrittweise aufbauen

Komplexität der Übungen schrittweise erhöhen

Vorkenntnisse bewusst fortführen

SuS lernen bereits in der Grundschule

- eigene Vorgehensweisen zu beschreiben, Lösungswege anderer zu verstehen und gemeinsam darüber zu reflektieren,
- mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht zu verwenden,
- Aufgaben gemeinsam zu bearbeiten und dabei Verabredungen zu treffen und diese einzuhalten.

(Aus: Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4))

In Übungen können die SuS:

- eigene Aufgabenbearbeitungen und Lösungen anderen SuS mündlich oder schriftlich beschreiben
- eigene Aufgaben zu überschaubaren Kontexten entwickeln
- gegebene einfache Rechnungen in eine Aufgabe übersetzen
- bekannte Fachbegriffe benutzen

Später können die SuS dann

- differenzierter und ggfs. auch reflektierter Überlegungen erläutern, die bestimmte Vorgehensweisen begründen
- Lösungswege und Überlegungen erläutern
- Vorgehensweisen und Ergebnisse vergleichen und reflektieren

Beispiele

Am Marktstand

Hier siehst du ein Foto von einem Marktstand.

Erzähle eine Rechengeschichte dazu.

Gib sie einem Partner, der sie dann bearbeitet.



(aus: Drücke-Noe et al., 2012)

Geschichtenpuzzle

Formuliere aus den folgenden Bausteinen eine Aufgabe:

- 20 €
- Einkaufen
- Wechselgeld
- 4 Äpfel
- ... €/kg

Löse die Aufgabe anschließend.

(aus: Drüke-Noe et al., 2012)

Rechendetektiv

$$15\text{€} - 3 \cdot 4,50\text{€} = \dots$$

Schreibe eine Geschichte, die zu dieser Rechnung passt.

Die Arbeitsphase im Überblick

Forderungen an einen Text/ an eine Aufgabe

Umsetzung von Vereinfachungsmöglichkeiten

Arbeit an Aufgaben

Mathematisches Kommunizieren prüfen



Forderungen

Ein **Aufgabentext** bzw. eine **Aufgabe** soll

- übersichtlich gestaltet sein
- klar und verständlich formuliert sein

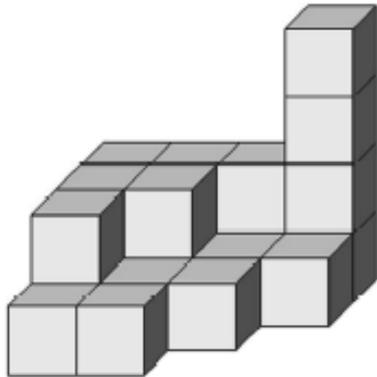
Zu beachten: informative Texte (u.a. Schulbuchtexte:

- sind Fachtexte
- sollten sprachlich optimal formuliert sein, ohne dabei inhaltlich zu verfälschen

Ziel:

Schwierigkeitsgrad wird nur durch den Inhalt und die zur Bearbeitung erforderlichen kognitiven Prozesse, nicht aber (primär) durch die Sprache bestimmt

Die Aufgabe „Unfertiger Würfel“



Hier wurde begonnen, aus kleinen Würfeln der Kantenlänge 1 cm einen großen Würfel zusammenzusetzen, der die Kantenlänge 4 cm haben soll.

Die in der Zeichnung verdeckten Würfel sind schon alle eingebaut.

Teilaufgabe 29.1

Peter will zuerst die beiden unteren Schichten vervollständigen.

Gib an, wie viele Würfel er dafür noch benötigt.

aus: VerA 8 (2013)

Mathematisches Kommunizieren hat vielfältige Teilkompetenzen

Wünschenswert:

- Bewusstes Umgehen mit Teilkompetenzen (beide Richtungen)
- Langfristiger Aufbau vielfältiger Teilkompetenzen
- Berücksichtigung potentieller sprachlicher Hürden

Nicht wünschenswert:

- Vermeidung sprachlicher Anforderungen

Literatur (Auswahl)

- Baumert, J. et al. (2001). *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Leske & Budrich. Opladen.
- Drüke-Noe, C. (2009). Mathematische Texte - auch in Klassenarbeiten. *mathematik lehren*, 156, 52-57.
- Drüke-Noe, C. (2012). Leseverstehen - mit Sprache muss man rechnen *Praxis der Mathematik in der Schule. Sekundarstufen I und II*, 46 (54), 2-11.
- Drüke-Noe, C., Keller, K. & Blum, W. (2012). Didaktische Handreichung zu den Vergleichsarbeiten 2012. Allgemeines Kapitel zur Kompetenz „Mathematisch Kommunizieren“. 8. Jahrgangsstufe (VERA-8) Mathematik. In Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) (Hrsg.).
- Franke, M. (2003). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Gallin, P. /Ruf, U. (1998). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 1. Austausch unter Ungleichen: Grundzüge einer interaktiven und fächerübergreifenden Didaktik*. Kallmeyer, Seelze.
- Hammer, Ch. (2010). Lesen, Schreiben und Sprechen im Mathematikunterricht, in: Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus und Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (Hrsg.): ProLesen. Auf dem Weg zur Leseschule - Leseförderung in den gesellschaftswissenschaftlichen Fächern (307-316). Donauwörth: Auer.
- Heckmann, L./ Vernay, R./ Witzmann, C. (2009). Textaufgaben? Kann ich nicht! In: *Mathematik 5 bis 10. Unterricht – Aufgaben – Materialien*. S. 4-5.
- KMK 2011. Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss und den Mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik
- Leiß, D./ Blum, W. (2006). Beschreibung zentraler mathematischer Kompetenzen In: Blum, W./ Drüke-Noe, C./ Hartung, R./ Köller, O. (Hrsg.). *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen*. Cornelsen Verlag Scriptor, Berlin, S. 33-50.
- Vollrath, H.-J. (2001). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

Wir könnten noch viel mehr zu
Mathematikaufgaben und Sprache zu sagen, aber ...



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Anmerkungen und Rückfragen gerne an
druekenoe@ph-weingarten.de

Christina Drüke-Noe