

# IPN – Podcast „Forschung für Bildung“ – Skript – Folge 7

## Mareike Müller-Krey:

Er gilt als besonders schwer zu lernen und zu unterrichten: Der mathematische Beweis. Warum er dennoch mit Fug und Recht in den Mathematikunterricht gehört und wie das Beweisverständnis der Schülerinnen und Schüler gestärkt und gefördert werden kann –m darüber reden wir heute in „Forschung für Bildung“

## *Intro-Musik*

Herzlich Willkommen bei „Forschung für Bildung“, dem Podcast des Leibniz-Instituts für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik in Kiel – kurz IPN. Mein Name ist Mareike Müller-Krey und ich arbeite am IPN im Bereich Öffentlichkeitsarbeit und digitale Wissenschaftskommunikation.

Unser Podcast beschäftigt sich mit dem Lehren und Lernen im Fach Mathematik. In dieser Folge widmen wir uns einem Thema, das als besonders schwer zu lernen und auch zu unterrichten gilt: Es geht um das mathematische Beweisen. Nachgehen werde ich dieser Frage heute zusammen mit meinen drei Gästen.

Wieder mit dabei in unserer Podcast-Folge ist Prof. Dr. Aiso Heinze, Direktor der IPN-Abteilung Didaktik der Mathematik. Er ist einer der wissenschaftlichen Köpfe hinter dem Podcast. Herzlich Willkommen Herr Heinze!

## Aiso Heinze:

Hallo und herzlich willkommen.

## Mareike Müller-Krey:

Und ich freue mich auf unsere heutigen Gäste: Femke Sporn und Professor Dr. Daniel Sommerhoff. Frau Sporn, Herr Sommerhoff, stellen Sie sich doch bitte kurz vor.

## Femke Sporn:

Mein Name ist Femke Sporn und ich bin Doktorandin am IPN Kiel. Im Rahmen meiner Forschung beschäftige ich mich mit dem Beweisverständnis von Schülerinnen und Schülern in der Sekundarstufe.

## Mareike Müller-Krey:

Herzlich Willkommen, Frau Sporn! Herr Sommerhoff?

## Daniel Sommerhoff:

Gerne, mein Name ist Daniel Sommerhoff und ich bin Juniorprofessor für Didaktik der Mathematik am IPN Kiel und bin stellvertretender Direktor der Abteilung Didaktik der Mathematik. Auch bei mir ist einer der Forschungsschwerpunkte das mathematische Beweisen.

## Mareike Müller-Krey:

Auch Sie heiße ich herzlich willkommen! Heute soll es also darum gehen, wie Schülerinnen und Schüler lernen, was ein mathematischer Beweis ist bzw. wie das Beweisen funktioniert. Herr Heinze, das mathematische Beweisen gilt als eines der schwierigsten Themen im Mathematikunterricht. Außerdem ist das Beweisen ein Thema das nichts mit der

Anwendung von Mathematik im Alltag zu tun hat. Da stellt sich mir als erstes die Frage, ob man den Schülerinnen und Schülern das Thema Beweisen nicht einfach ersparen kann?

Aiso Heinze:

Mathematische Beweise sind nicht ohne Grund Thema des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe und sie kommen in der Vorform des mathematischen Argumentierens auch schon in der Grundschule vor. Das mathematische Beweisen ist die Methode der Evidenzgenerierung in der Mathematik, also die Methode, mit der man in der Mathematik die Gültigkeit von Aussagen und Regeln absichert. Wenn man das Beweisen im Mathematikunterricht nicht erwähnen würde, dann wäre das vergleichbar mit einem Chemie- oder Physikunterricht, in dem keine Experimente vorkommen. Damit würde also ein essenzieller Aspekt des Faches fehlen und es gehört ja zum Allgemeinbildungsanspruch der Schule, dass die Lernenden erfahren, was die charakteristischen Eigenschaften der einzelnen Fächer sind und wie die einzelnen Disziplinen funktionieren. Beim Beweisen in der Mathematik gelten schließlich ganz andere Regeln als beim Nachweis durch Experimente in der Physik oder Chemie.

Mareike Müller-Krey:

Ich verstehe. Herr Sommerhoff, könnten Sie mir – als Nicht-Mathematikerin – und unseren Hörerinnen und Hörern einmal erklären, was ein mathematischer Beweis überhaupt ist?

Daniel Sommerhoff:

Da stellen Sie eine Frage, die alles andere als leicht zu beantworten ist und schon lange diskutiert wird. Ein Beweis ist zunächst eine mathematische Argumentation, die dann noch gewisse Eigenschaften erfüllen muss. In der Literatur werden eine ganze Reihe von notwendigen Eigenschaften eines mathematischen Beweises beschrieben. Welche Eigenschaften dann aber ausreichend für die Akzeptanz eines Beweises sind, ist in der mathematischen Praxis nicht genauer festgelegt und teils abhängig vom mathematischen Kontext. Ein Konsens besteht jedoch beispielsweise dazu, dass ein mathematischer Beweis zu einer Aussage aus einer Aneinanderreihung von deduktiven Argumenten besteht, die von den Voraussetzungen der Aussage zur Behauptung führt. Außerdem darf dabei beispielsweise die Behauptung nicht als Argument verwendet werden. Insgesamt stellt mathematisches Beweisen also ein deduktives Vorgehen dar und nicht wie in empirisch-experimentellen Fächern ein induktives Vorgehen.

Mareike Müller-Krey:

Ok, aber diese Beschreibung klingt doch schon sehr so, als ob man genau sagen könnte, was einen mathematischen Beweis ausmacht bzw. wann dieser korrekt ist, oder etwa nicht?

Aiso Heinze:

Na ja, ein paar zentrale Punkte sind doch noch unklar. Offen ist zum Beispiel bei der logischen Argumentationskette, nach welchen Kriterien sie als korrekt bzw. überzeugend angenommen wird.

Mareike Müller-Krey:

Aber sagen einem das nicht die Regeln der Logik, ob der Beweis korrekt ist?

Daniel Sommerhoff:

Nein, nicht so klar, wie man denken würde. Genau mit diesem Problem hat sich die Mathematik schon vor hundert Jahren intensiv beschäftigt. Die Argumentationen in einem Beweis sind in der Praxis ja nie so ausführlich aufgeschrieben, dass sie nur mit logischen Regeln und ohne mathematisches Hintergrundwissen prüfbar sind. Nehmen Sie zum Beispiel ein rechtwinkliges Dreieck mit einem Winkel der Größe  $60^\circ$ . Wenn Sie argumentieren, dass der dritte Winkel im Dreieck  $30^\circ$  groß sein muss, weil die Winkelsumme in jedem Dreieck  $180^\circ$  beträgt, dann setzen Sie voraus, dass der Satz über die Winkelsumme im Dreieck bekannt ist. Dies ist aber eine mathematische Aussage, also mathematisches Wissen, und keine allgemeine logische Regel. Wenn man nun für diese einfache Folgerung im rechtwinkligen Dreieck die Argumentation soweit ins letzte Detail kleinschrittig beweisen wollen würde, dass kaum noch mathematisches Wissen notwendig wäre, dann würde der Beweis sehr, sehr lang werden.

Mareike Müller-Krey:

Das erstaunt mich jetzt. Es gibt aber doch viele mathematische Beweise, die nicht so lang sind, z.B. der Beweis zum Satz des Pythagoras.

Aiso Heinze:

Ja, natürlich. Aber diese Beweise basieren alle darauf, dass man von Beweisschritt zu Beweisschritt mathematisches Hintergrundwissen benutzt, das nicht hingeschrieben wird. Man könnte andersherum sagen, dass der Beweis viele Lücken enthält, die man beim Lesen gedanklich selbst füllt. Die Frage beim Aufschreiben eines Beweises ist nun, wie viel Hintergrundwissen darf man voraussetzen oder anders gesagt: Wie groß dürfen die Lücken sein?

Mareike Müller-Krey:

Und wie groß dürfen sie sein?

Daniel Sommerhoff:

Tja, das steht im Detail nirgends. Dies ist genau eine der Bedingungen für mathematische Beweise, die nicht explizit geklärt ist. Es gibt nur die abstrakte Aussage, dass ein Beweis dann ein Beweis ist, wenn er von den Mathematikerinnen und Mathematikern als Beweis akzeptiert wird, also wenn der aufgeschriebene Beweis eben „überzeugt“, woran auch immer dies festgestellt wird. Im Endeffekt bedeutet dies, dass zwar die Logik ein Gerüst liefert, aber die letztendliche Akzeptanz eines Beweises ein sozialer Prozess in der mathematischen Gemeinschaft ist, dessen Kriterien nicht im Detail geklärt sind.

Mareike Müller-Krey:

Das ist interessant. Dann steckt ja wohl doch nicht nur Logik in der Mathematik, sondern anscheinend mehr soziale Konsensbildung als viele denken.

Kommen wir zum Mathematikunterricht. Herr Heinze, Sie sagten vorhin, dass die Schülerinnen und Schüler lernen sollen, dass das Beweisen die spezifische Nachweismethode in der Mathematik ist. Es geht also darum, dass die Gültigkeit mathematischer Aussagen mit Beweisen abgesichert wird.

Aiso Heinze:

Ja, die Verifikation mathematischer Aussagen ist eine der zentralen Funktionen von Beweisen. Dadurch wird gesichert, dass das mathematische Theoriegebäude allgemein gültig ist.

Mareike Müller-Krey:

Gibt es denn noch weitere Funktion von Beweisen?

Daniel Sommerhoff:

Ja, verschiedene. Eine weitere wichtige Funktion ist, dass mathematische Beweise idealerweise erklären, warum die bewiesenen Aussagen gültig sind. Dies tun nicht alle Beweisformen, da beispielsweise Widerspruchsbeweise oft keinen oder nur einen beschränkten Erklärungsgehalt haben. Generell sollte man anhand der Argumentation in einem Beweis eine inhaltliche Idee bekommen, warum eine Aussage gilt, warum bestimmte Voraussetzungen notwendig sind und welche zuvor bewiesenen Aussagen Einfluss haben. In der mathematischen Forschung spielt die Erklärungsfunktion eine sehr große Rolle, da ein zentrales Ziel ist mathematischen Aussagen auch zu verstehen.

Femke Sporn:

Diese in der Wissenschaft wichtige Erklärungsfunktion kann man sich auch in der Schule zunutze machen. Viele Schülerinnen und Schüler werden ja wenig motiviert, wenn sie per Beweis zeigen sollen, dass eine Aussage gültig ist. Ihnen ist klar, dass die Aussage natürlich korrekt ist, denn sonst würde ihre Lehrkraft ja sicherlich keine kostbare Unterrichtszeit dafür verschwenden. Also, fragen sie sich, warum eine Verifikation per Beweis überhaupt noch nötig ist. Hier kann man nun die Erklärungsfunktion in den Vordergrund stellen und fragen, warum eine Aussage gilt. Wie kann man das inhaltlich erklären? Dies gibt auch Anhaltspunkte dafür, wann der Beweis ausführlich genug ist, nämlich dann, wenn die Erklärung von den anderen verstanden wurde. Leider haben nicht alle Beweise in der Schule einen hohen Erklärungsgehalt, darum müssen hier gute Beispiele ausgewählt werden.

Mareike Müller-Krey:

Das ist ein interessanter Ansatz: Die Beweise als Erklärungen müssen von anderen verstanden werden. Wie ich anfangs erwähnte, gilt das Beweisen als besonders schwer. Woran liegt das eigentlich?

Daniel Sommerhoff:

Der wesentliche Grund liegt darin, dass viele Beweisaufgaben eine doppelte Anforderung enthalten. Zum einen muss die Lösung eine überzeugende, mathematische korrekt formulierte Argumentation umfassen und zum anderen sind viele Beweisaufgaben für die Schülerinnen und Schüler Problemlöseaufgaben. Das Problemlösen ist ja schon alleine schwer, auch wenn es sich nicht um Beweise handelt. In Beweisproblemen sind mit dem Argumentieren und Problemlösen dann zwei der schwierigsten mathematischen Tätigkeiten kombiniert.

Mareike Müller-Krey:

Kann man das für den Unterricht nicht vereinfachen?

Aiso Heinze:

Im Prinzip ja. Man kann auch Beweisaufgaben stellen, die keinen Problemlösecharakter haben. Außerdem muss das Beweisen nicht immer bei gerade neu eingeführten und damit wenig vertrauten Inhalten thematisiert werden. Beispielsweise könnte man mathematische Regeln zunächst plausibel machen und so nutzen. Nach einiger Zeit, wenn die Schülerinnen und Schüler vertraut mit den Begriffen und der Aussage sind, kann man sich einem Beweis zuwenden. Wichtig ist dabei auch, dass im Unterricht nicht ein fertiger Beweis Schritt für Schritt an der Tafel erarbeitet wird. Etwa in der Form, dass die Schülerinnen und Schüler durch enge, kleinschrittige Fragen der Lehrkraft die einzelnen Beweisschritte nennen.

Mareike Müller-Krey:

Aber ist das nicht das normale Vorgehen? Wie soll man das sonst machen?

Femke Sporn:

Na ja, der fertige Beweis aus dem Lehrbuch ist ja ein optimiertes Produkt, das elegant aufgeschrieben ist. Der Beweis ist ja nicht so entstanden, dass man bei den Voraussetzungen angefangen hat und dann mit einem Schritt nach dem anderen bei der Behauptung gelandet ist. Nehmen Sie als Vergleich ein fertiges Auto als Produkt. Hier würde man ja auch nicht auf die Idee kommen, es mit KFZ-Auszubildenden schrittweise nachzubauen, indem man beim Blinker links vorne anfängt und an der Bremsleuchte rechts hinten endet. Anders gesagt: Aus dem fertigen Beweis als Produkt lässt sich in der Regel nicht auf den Prozess der Entstehung schließen und letzterer ist entscheidend für das Beweisen Lernen.

Mareike Müller-Krey:

Das sehe ich ein, aber wie soll man es dann machen?

Daniel Sommerhoff:

Nach dem, was Frau Sporn gesagt hat, ist die Konsequenz für die Unterrichtsvorbereitung, dass der Beweisprozess, also die Herleitung des Beweises mit seinem heuristischen Vorgehen didaktisch rekonstruiert werden muss. Konkret stellt man sich als Lehrkraft also die Frage: Welche gedanklichen Schritte hat eine Person idealtypisch durchgeführt, als sie erstmals eine Lösung für das Beweisproblem erarbeitet hat. Dabei wird man Hürden oder Stolperstellen identifizieren, für die dann im Unterricht didaktische Hinweise gegeben werden können.

Mareike Müller-Krey:

Lässt sich das an einem Beispiel konkretisieren?

Aiso Heinze:

Ein typisches Beispiel für so eine Hürde ist etwa die Hilfslinie in der Geometrie, die man einzeichnet, um einen Zusammenhang in einer Beweisfigur besser zu sehen. Hier ist zu überlegen, wie man auf die Idee kommen kann, so eine Hilfslinie einzuzeichnen. In der Regel ist das ja keine Zauberei und die Schülerinnen und Schüler sollten auch nicht diesen Eindruck bekommen. Hat man den heuristischen Prozess rekonstruiert, kann man dazu Lerngelegenheiten gestalten, etwa als Unterrichtsgespräch oder als Partner- oder Gruppenarbeit. Dies hängt dann vom Leistungsstand der Klasse ab.

Mareike Müller-Krey:

Alles klar. Herr Heinze, kommen wir noch einmal zu dem Ziel, dass Schülerinnen und Schüler die besonderen Eigenschaften des Beweisens kennenlernen sollen, da sich das Beweisen im Fach Mathematik anders darstellt als Nachweismethoden in anderen Fächern. Was mich interessiert: Was kommt eigentlich bei den Schülerinnen und Schülern bis zum Ende der Schulzeit an? Erreicht man dieses Lernziel?

Aiso Heinze:

Also, auch wenn diese Frage eigentlich sehr naheliegend ist, gibt es bisher kaum systematische empirische Studien dazu, in welchem Umfang Schülerinnen und Schüler ein Beweisverständnis aufbauen. Was es gibt, sind Studien zu einzelnen Aspekten. Beispielsweise gibt es relativ viele Studien zur Beweiskompetenz von Schülerinnen und Schülern oder von Studierenden zu Studienbeginn. Dabei geht es um die Frage, wie gut Beweisprobleme gelöst werden können. Die Ergebnisse sind eher ernüchternd.

Daniel Sommerhoff:

Außer den Studien zur Beweiskompetenz gibt es noch einzelne Studien zu der Frage, inwiefern Schülerinnen und Schülern die erlaubten und nicht erlaubten Methoden für mathematische Beweisen kennen. Dies wurde in Tests erhoben, bei dem vorgelegte Beweisversuche bewertet werden sollten. Hier fielen die Ergebnisse besser aus als beim eigenständigen Beweisen. Allerdings gibt es dennoch viele Schülerinnen und Schüler und auch Studierende, die zum Beispiel nicht erkennen, dass bei einem Beweis die Behauptung als Voraussetzung verwendet wird oder ein einziges Beispiel für ausreichend halten, um eine allgemeingültige mathematische Aussage zu beweisen. Wie Herr Heinze schon erwähnte, gibt es keine Studien, die das Beweisverständnis möglichst breit erfasst und untersucht haben. So eine Studie stellt auch eine sehr große Herausforderung dar und wir haben für diese Aufgabe deshalb ein Promotionsvorhaben definiert. Frau Sporn hat sich dann dieser Frage angenommen.

Mareike Müller-Krey:

Das klingt spannend. Frau Sporn, wie gehen Sie denn dabei vor?

Femke Sporn:

Also, insgesamt hat sich das in der Tat als ein sehr komplexes Unterfangen herausgestellt. Wie in der Wissenschaft üblich, ist der erste Schritt immer die Klärung des Untersuchungsgegenstands. Dies ist in unserem Fall ja das Konstrukt, das vorhin als „Beweisverständnis“ bezeichnet wurde. Hier stellt sich erst einmal die Frage, was alles darunter gefasst werden soll. Da es ja schon viele Studien zur Beweiskompetenz gibt, also der Kompetenz eigene Beweise zu erstellen, haben wir diesen Bereich nicht weiter betrachtet. Stattdessen fokussieren wir das Wissen und die Einstellungen auf einer Metaebene, also: Wissen die Schülerinnen und Schüler, welche Art von Argumenten in einem mathematischen Beweis erlaubt sind? Welche Formen von Beweisen oder Beweisversuchen akzeptieren sie als Beweis? Worin sehen sie die Funktion von Beweisen für das Fach Mathematik? Wie ist ihr Beweisbedürfnis ausgeprägt, das heißt, in welchen Fällen denken sie, dass ein Beweis notwendig ist? Und schließlich: Inwiefern sind sie motiviert, mehr über das Beweisen lernen zu wollen, also ihr Beweisverständnis weiterentwickeln zu wollen?

Mareike Müller-Krey:

Aha, Sie fokussieren also auf das Beweisverständnis der Schülerinnen und Schüler im Sinne des Wissens und der Einstellungen auf der Metaebene. Mir stellt sich die Frage, ob dieses abstrakte Wissen für das Handeln der Schülerinnen und Schülern ausreicht. Wenn ein Schüler sagt: „Das Prüfen von einem Beispiel reicht nicht, um eine allgemeine mathematische Regel zu beweisen.“, dann kann es ja trotzdem sein, dass er bei einer konkreten Aufgabe trotzdem so vorgeht, oder?

Femke Sporn:

Ja, da haben Sie vollkommen recht, das Phänomen kann auftreten. Entsprechend haben wir das Modell zum Beweisverständnis noch einmal „gedoppelt“: Alle Aspekte werden zum einen abstrakt betrachtet und zum anderen bezogen auf konkrete Beweissituationen.

Mareike Müller-Krey:

Können Sie dafür ein Beispiel nennen?

Femke Sporn:

Wir unterscheiden die Anforderungssituationen in konzeptorientierte und handlungsorientierte Situationen. Konzeptorientierte Situationen sind die abstrakten Situationen, wie in ihrem gerade genannten Beispiel. Hier fragen wir beispielsweise abstrakt nach einer Einschätzung, ob die Prüfung eines oder mehrerer Beispiele ausreicht, um eine mathematische Aussage zu beweisen. Handlungsorientierte Situationen betreffen konkrete Beweise oder fehlerhafte Beweisversuche. Hier gibt es eine konkrete mathematische Aussage oder Regel und einen Beweisversuch eines fiktiven Schülers oder einer fiktiven Schülerin. Dann wird gefragt, ob das gezeigte Vorgehen korrekt ist oder überzeugend oder erklärend usw. Dabei zeigt sich dann, ob bei der konkreten Anwendung beispielsweise erkannt wird, dass die Prüfung eines oder mehrerer Beispiele nicht immer ausreicht.

Mareike Müller-Krey:

Das klingt für mich plausibel. Was ich mich noch frage: Für die Einschätzung der Antworten der Schülerinnen und Schüler zum Beweisverständnis müssen Sie ja wissen, was richtig und falsch bzw. adäquat oder nicht adäquat ist. Nun hatten Sie, Herr Heinze, Herr Sommerhoff, am Anfang ja erläutert, dass diese Kriterien für das Beweisen in der Mathematik noch gar nicht bis ins Detail geklärt sind. Bringt das nicht Probleme bei der Bewertung mit sich?

Aiso Heinze:

Ja, ein wenig schon. Wenn in der Wissenschaft Mathematik bestimmte Normen nicht präzise expliziert sind, dann ist es bei einigen Aspekten schwer, eine Bewertung vorzunehmen, da der Referenzrahmen unklar ist. Glücklicherweise gibt es beim Beweisen doch eine Reihe von Aspekten, die klar sind.

Daniel Sommerhoff:

Ja, einen einfachen Fall hatte Frau Sporn gerade genannt. Bei einem mathematischen Beweis einer allgemeingültigen Regel reicht es nicht aus, dies nur an 2-3 Beispielen zu überprüfen. Diese Norm ist präzise und unbestritten. Schwieriger ist es bei der Frage, wie detailliert Beweise ausformuliert sein müssen. Hier versucht Frau Sporn in ihren Fragebögen immer Fälle zu nehmen, die wenig Interpretationsspielraum lassen.

Mareike Müller-Krey:

Was haben Sie in Ihren Studien bislang herausgefunden Frau Sporn?

Femke Sporn:

Noch bin ich nicht fertig. Bisher habe ich drei Studien durchgeführt, wobei die Datenauswertung der dritten Studie noch aussteht. In der ersten Studie ging es darum, die verschiedenen Facetten in dem Modell zum Beweisverständnis durch Fragebogenitems abzubilden. Dies war sehr aufwändig, weil bei der Fragebogenentwicklung viele Korrekturschleifen und eine Erprobung nötig waren. Die entscheidende Frage der Studie 1 war dann, ob das Modell und die entwickelten Instrumente veränderungssensitiv sind.

Mareike Müller-Krey:

Veränderungssensitiv? Was ist damit gemeint?

Femke Sporn:

Unser Ziel ist ja die Untersuchung, wie sich das Beweisverständnis von Schülerinnen und Schülern im Verlauf der Sekundarstufe entwickelt. Entsprechend müssen unser erarbeitetes Modell zum Beweisverständnis und die zugehörigen Fragebogeninstrumente geeignet sein, eine Veränderung des Beweisverständnis zu erfassen und abzubilden. Ansonsten kann es ja sein, dass sich das Beweisverständnis von Klasse 7 bis 13 zwar gut entwickelt hat, unsere gesammelten Daten zeigen dies aber nicht, da die Instrumente oder das Modell ungeeignet waren, diese Veränderung abzubilden.

Mareike Müller-Krey:

Okay. Und wie sind Sie da vorgegangen?

Femke Sporn:

Wir haben dies in der ersten Studie mit einer Stichprobe von 234 Mathematikstudierenden im Verlauf des ersten Semesters geprüft. Im Gegensatz zum Schulunterricht kommen an der Hochschule ja gleich von Beginn an sehr viel Beweise vor und das Beweisverständnis muss sich zwangsläufig im ersten Semester stark entwickeln, sonst kommen die Studierenden nicht mit. Wir haben also die anspruchsvolleren Items unserer Instrumente zu Beginn und zum Ende des ersten Semesters eingesetzt und geprüft, ob die dort stattfindende Entwicklung des Beweisverständnisses in den einzelnen Facetten abgebildet wird. Das hat auch einigermaßen geklappt.

Mareike Müller-Krey:

Das klingt nach einem geschickten Vorgehen. Und danach haben Sie eine Längsschnittstudie von Klasse 7 bis 13 gestartet?

Aiso Heinze:

Oh nein, das haben wir verhindert. Sieben Jahre Datenerhebung mit anschließender Auswertung – so viel Zeit ist für eine Doktorarbeit nicht vorgesehen.

Mareike Müller-Krey:

Aber wie geht man dann vor, wenn es um die Entwicklung im Verlauf der Sekundarstufe geht?



Femke Sporn:

Ich habe in meiner zweiten Studie eine sogenannte Pseudolängsschnittstudie durchgeführt. Das heißt, dass ich nicht eine Kohorte von Schülerinnen und Schülern von Klasse 7 bis 13 verfolgt habe, sondern ich habe gleichzeitig Daten in Klassen verschiedener Klassenstufen am Ende des Schuljahrs erhoben. Die Aussagekraft ist dann natürlich geringer, da es verschiedene Schülerinnen und Schüler in den verschiedenen Klassenstufen sind und hier andere Einflussfaktoren stören können. Um einen Eindruck von der Entwicklung im Verlauf der Sekundarstufe zu erhalten, ist ein solches Vorgehen aber trotzdem geeignet. Problematisch bei der Durchführung der Studie war für mich eher die Corona-Pandemie. Viele Lehrkräfte hatten zwar Interesse mit ihren Klassen an der Studie teilzunehmen, sie konnten aufgrund des vielen Unterrichtsausfalls durch die Pandemie aber keine Unterrichtszeit entbehren. Mir hat das damals viele schlaflose Nächte bereitet und wir haben sämtliche Schulkontakte genutzt, die wir hatten. Am Ende hatte ich zum Glück für einige der Fragebögen Daten von 456 Schülerinnen und Schüler aus den Klassenstufen 8 bis 11 zusammen, die ich dann auswerten konnte.

Mareike Müller-Krey:

Das klingt in der Tat nach einer stressigen Zeit. Können Sie denn schon Ergebnisse berichten?

Femke Sporn:

Ja, erste Auswertungen liegen vor. Es zeigt sich wie erwartet, dass die Unterteilung des Beweisverständnisses in eine abstrakte konzeptorientierte Komponente und eine konkrete handlungsorientierte Komponente sinnvoll ist. Beim Metawissen über Beweise ergaben sich unterschiedliche Ergebnisse für die beiden Komponenten: Im Vergleich der Klassenstufen 8 bis 11 zeigt sich, dass das abstrakte Metawissen über Beweise in den höheren Klassenstufen ein klein wenig besser ausgeprägt ist als bei den jüngeren Schülerinnen und Schülern, während es bei der Anwendung des Wissens über Beweise in konkreten Beweissituationen keine signifikanten Unterschiede zwischen den Jahrgängen gibt. Generell ist das Metawissen über das Beweisen aber tendenziell eher gering ausgeprägt und recht stabil.

Mareike Müller-Krey:

Das ist interessant. Die Ergebnisse weisen also darauf hin, dass die Schülerinnen und Schüler beim Wissen über das Beweisen nichts oder kaum etwas dazulernen über die Jahre. Damit werden die Ziele, die Herr Heinze zu Beginn nannte, ja eigentlich nicht erreicht!?

Femke Sporn:

Ja, man kann die Ergebnisse vorsichtig in diese Richtung interpretieren. Allerdings haben wir die Einschränkung, dass es kein echter Längsschnitt ist. Insgesamt sind die Ergebnisse natürlich etwas enttäuschend, insbesondere auch, weil unsere Stichprobe fast ausschließlich von Gymnasien stammt und ich schon einen etwas deutlicheren Effekt über mehrere Schuljahre erwartet hätte.

Mareike Müller-Krey:

Daraus würde ich dann schließen, dass gerade zum Metawissen über Beweise entsprechendes Lernmaterial notwendig ist, das Lehrkräfte im Unterricht einsetzen können, richtig?

Femke Sporn:

Ja, genau. Für den Aufbau eines Beweisverständnisses scheint es sinnvoll zu sein, das Metawissen über Beweise sowohl abstrakt konzeptorientiert aber auch konkret handlungsorientiert im Unterricht zu behandeln. Die Schülerinnen und Schüler haben in meiner Studie beispielsweise abstrakt konzeptorientiert eher zugestimmt, dass die Angabe weniger Beispiele für einen gültigen Beweis nicht ausreicht. Einen Beweisversuch, in dem genau dieser Fehler gemacht wurde, wurde von den Schülerinnen und Schülern dennoch häufiger als gültiger Beweis bewertet.

Mareike Müller-Krey:

Haben Sie denn schon Ideen, was man im Unterricht konkret machen könnte?

Femke Sporn:

Ich habe bereits parallel zu der Datenauswertung der zweiten Studie begonnen, Material für fünf Unterrichtsstunden zu entwickeln, das ab der Klassenstufe 9 eingesetzt werden kann. Die fünf Stunden umfassen zur Einführung eine Doppelstunde und danach drei Einzelstunden und sollen über das Schuljahr verteilt werden. Sie behandeln bereits bekannte Aussagen und Beweise auf einer Metaebene. Das Material kann also an den Stellen im Unterricht eingesetzt werden, an denen diese Themen in der Klassenstufe sowieso behandelt werden. Es wird eben nur ein etwas stärkerer Fokus auf das Metawissen über Beweise gesetzt. Damit das thematisierte Wissen nicht wieder vergessen wird, wird in jeder Stunde auf die vorherige Stunde Bezug genommen und alle Ergebnisse werden auf einem gemeinsamen Plakat gesichert, das sich über das Schuljahr füllt. Dort stehen dann am Ende des Schuljahres erlaubte und nicht erlaubte Argumente in einem mathematischen Beweis. Das Material wurde auch schon von einigen Lehrkräften eingesetzt und ich habe auch Daten zur Evaluation erhoben. Die Auswertung dieser Daten steht aber noch aus. Wir hoffen natürlich, dass das Lernmaterial geeignet ist, das Metawissen über Beweise zu fördern und damit ein Beweisverständnis der Schülerinnen und Schüler zu stärken.

Mareike Müller-Krey:

Alles klar. Das hört sich so an, dass auch die Unterrichtspraxis von Ihrer Arbeit profitieren könnte. Dann drücke ich die Daumen, dass sich hier positive Effekte zeigen.

Und damit sind wir am Ende dieser Folge Nr. 7 von „Forschung für Bildung“, dem Podcast zur mathematikdidaktischen Forschung am IPN. Ganz herzlichen Dank an Sie alle: Frau Sporn, Herr Sommerhoff, Herr Heinze. Danke, dass Sie unseren Hörerinnen und Hörern diese spannenden Einblicke gegeben haben, was es mit dem mathematischen Beweisen im Mathematikunterricht auf sich hat.

Liebe Zuhörerinnen und Zuhörer, schalten Sie auch im November wieder ein, wenn wir uns mit einem weiteren spannenden Thema der mathematikdidaktischen Forschung beschäftigen. Das nächste Mal wird es um Studien gehen, die die Rolle der Mathematik für das Physiklernen betrachtet. Bis dahin freuen wir uns natürlich, wenn Sie unseren Podcast „Forschung für Bildung“ bei Spotify oder einfach unseren YouTube-Kanal abonnieren. In beiden Fällen werden Sie sofort benachrichtigt, wenn die nächste Folge verfügbar ist.

Wenn Ihnen der Podcast gefällt, sagen Sie es weiter und schicken Sie uns gerne Fragen, Anregungen, Kritik oder Lob an [socialmedia@leibniz-ipn.de](mailto:socialmedia@leibniz-ipn.de).

Schön, dass Sie dabei waren. Bis bald und auf Wiedersehen.